Hidak és Profunktorok

Pécsi Bertalan

a disszertáció tézisei
2012

ELTE TTK, Matematika Doktori Iskola
(vezeti: *Laczkovich Miklós*, egyetemi tanár)
Elméleti Matematika Program
(vezeti: *Szűcs András*, egyetemi tanár)

Témavezető: *Sain Ildikó*, a matematikai tudományok kandidátusa

Kivonat

A ‘*Hidak és Profunktorok*’ című értekezés tárgya a bikategóriák, kettős kategóriák és a köztük menő lax, kolax funktorok egy alternatív, koherencia-ötszögtől és különbözeti celláktól mentes felépítése és néhány további, ezekhez kapcsolódó struktúra vizsgálata. Az axiomatikus felépítésben Tom Leinster egyik irányvonalát követjük, továbbá profunktorokat és reflexiókat használunk.

———————o———————

Alább felvázoljuk az értekezés főbb téziseit fejezetenként. Amelyeknél nem szerepel külső hivatkozás nem saját publikációra, azok – legjobb tudomásom szerint, – mind saját eredmények.

1. Bikategóriák

Tom Leinster „unbiased bicategory” definíciójának [Leinster] egy elemi interpretációját adjuk (1.1. def.): eszerint egy bikategóriában adottak pontok (objektumok), a pontok között nyilak, a nyilak között 2-cellák ($\cdot \underset{\to}{\overset{\to}{\Downarrow}} \cdot$), amik függőlegesen komponálhatóak egymással (minden pontpárra a köztük menő nyilak és az azok közti 2-cellák kategóriát alkotnak), valamint a nyilak is komponálhatóak „vízszintesen”, azonban ez a kompozíció csak izomorfizmus erejéig (*gyengén*) asszociatív. Az 1.1. def.-ban a nyilak kompozícióját egy gyengén asszociatív *műveletcsaláddal* adjuk meg: minden n hosszú úthoz rendelünk egy nyilat az út kezdőpontjától a végpontjáig. Az $n = 0$ esetet is értelmezhetjük, így a kompozíció és az egység egy füst alatt kezelhető, továbbá a koherencia axióma is egy fokkal befogadhatóbb, mint az eredeti Bénabou-féle definícióban.

Ezután felvázolunk néhány bikategórián belül értelmezhető fogalmat, úgymint *adjungált* nyílpár vagy belső *monoid*, *monoidhatás*, belső *bimodulus*.

Példaként bemutatjuk többek között a $\mathbb{Span}$ bikategóriát (1.1.7. pl.): ennek objektumai a halmazok, az A és B halmazok közti nyilai az A, B ponthalmazokon vett *páros gráfok*, azaz az $A \leftarrow E \rightarrow B$ („kezdő- és végpontot kijelölő”) függvénypárok (*span*-ek), ahol E a páros gráf éleinek halmaza. $\mathbb{Span}$ 2-cellái a pontokat fixen hagyó gráfmorfizmusok; a páros gráfok vízszintes kompozíciójában az élek az egymást követő élpárok lesznek, illetve n-hosszú élsorozatok az n-tényezős kompozíció esetére.

1.1.14. példa: A $\mathbb{Span}$ bikategória belső monoidjai pont a kategóriák, [Betti].

2. Profunktorok

A 2., 3. és 4. fejezetek eredményeit a [Pecsi] cikkben publikáltam, és egy töredékük már a diplomamunkámban is szerepelt, [PecsiDipl].

2.1. Definíció. A $\mathcal{H}$ kategóriát ***hídnak*** nevezzük az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kategóriák közt, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ [vagy izomorf példányaik] diszjunkt teljes részkategóriák $\mathcal{H}$-ban, és $\mathcal{H}$-nak nincs más objektuma, azaz $\mathrm{Ob}\mathcal{H} = \mathrm{Ob}\mathcal{A} \cup \mathrm{Ob}\mathcal{B}$. **Jel.**: $\mathcal{H}\!:\!\mathcal{A} \rightleftharpoons \mathcal{B}$.
Az $\mathcal{A}$-n és $\mathcal{B}$-n kívüli nyilakat *heteromorfizmusoknak* nevezzük.

A $\mathcal{H}$ hidat *irányított hídnak* vagy röviden ***ágnak*** hívjuk, ha nincs $B \to A$ alakú heteromorfizmusa (legfeljebb tehát csak $A \to B$ alakú). **Jel.**: $\mathcal{H}\!:\!\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$.

Az $\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ irányított hidak egyfelől a $\mathbb{Span}$-beli belső bimodulusokat testesítik meg, másfelől még az $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{Set}$ alakú funktorokat, úgynevezett *profunktorokat* is.

Bevezetjük a kategóriák és ágak $\mathbb{Prof}$ bikategóriáját, majd a kategóriák és funktorok $\mathbb{Cat}$ bikategóriájának két kanonikus, $\mathbb{Prof}$-ba való beágyazását tárgyaljuk: e szerint minden $F\!:\!\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor meghatároz egy $F_*\!:\!\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ és egy $F^*\!:\!\mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{A}$ ágat, valamint belátjuk a következőt:

2.7. Tétel. Legyen $\mathcal{F}\!:\!\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ egy ág. Ekkor a következők teljesülnek:
a) Pontosan akkor van olyan $F\!:\!\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor, amire $\mathcal{F} \cong F_*$, ha $\mathcal{B}$ reflektív részkategóriája $\mathcal{F}$-nek.
b) Pontosan akkor van olyan $G\!:\!\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktor, amire $\mathcal{F} \cong G^*$, ha $\mathcal{A}$ koreflektív részkategóriája $\mathcal{F}$-nek.
c) Ha mindkét feltétel teljesül, a reflexiókból és koreflexiókból definiálható F és G funktorok adjungáltak lesznek: $F \dashv G$ (azaz $F_* \cong G^*$).

2.9. Következmény. Tekintsük azt az $\mathcal{Adj}$ kategóriát, aminek objektumai a kategóriák, $\mathcal{A}$-ból $\mathcal{B}$-be menő nyilai az adjungált funktorpárok $\underset{\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{A}}{\langle F\,,\,G\rangle}:\ F \dashv G$.
Tekintsük továbbá ennek a következő két részkategóriáját:

$$\mathcal{Corefl} := \{\langle F, G\rangle \in \mathcal{Adj} \mid F \text{ teljes beágyazás}\}$$
$$\mathcal{Refl} := \{\langle F, G\rangle \in \mathcal{Adj} \mid G \text{ teljes beágyazás}\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{Adj} = \mathcal{Corefl} \cdot \mathcal{Refl},$$

azaz $\forall\ F \dashv G$ adjunkcióhoz $\exists\ F_1 \dashv G_1$ és $F_2 \dashv G_2$, hogy $F = F_1F_2,\ \ G = G_2G_1$, és F_1 és G_2 teljes beágyazások.

3. Ekvivalenciahidak

A kategóriák ekvivalenciáját és Morita ekvivalenciáját jellemezzük bizonyos fajta hidakkal:

3.4. Tétel. Két kategória, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, pontosan akkor *ekvivalens* egymással $\mathbb{Cat}$-ban, ha létezik köztük egy olyan $\mathcal{H}\!:\!\mathcal{A} \rightleftharpoons \mathcal{B}$ híd, amiben minden $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$-hoz van egy $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ és minden $B \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$-hez van egy $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ úgy, hogy $\mathcal{H}$-ban $A \cong B$.

3.9. Tétel. Két kategória, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, pontosan akkor *Morita ekvivalens* egymással (azaz ekvivalensek $\mathbb{Prof}$-ban), ha létezik köztük egy olyan $\mathcal{M} : \mathcal{A} \rightleftharpoons \mathcal{B}$ híd, amiben minden nyíl felírható heteromorfizmusok kompozíciójaként.

4. Morita-összefüggések

A gyűrűk köréből ismert ún. *Morita-összefüggések* és a hidak közös általánosítását vezetjük be, tetszőleges bikategóriában:

4.1. Definíció. Legyenek adottak az $f : A \to B$ és $g : B \to A$ nyilak egy bikategóriában, ellátva $\mu : fg \Longrightarrow 1_A$ és $\nu : gf \Longrightarrow 1_B$ ún. *alkotó* 2-cellákkal. Ezek egy (belső) *Morita-összefüggést* határoznak meg, amennyiben

$$\mu f = f\nu \quad \text{és} \quad g\mu = \nu g.$$

Ezután felvázoljuk El Kaoutit tételét (4.3. tétel, [El Kaoutit]), miszerint bármely $\mathbb{B}$ bikategória belső Morita-összefüggései egy újabb bikategóriát alkotnak, amit $\mathbf{Mrt}\mathbb{B}$-vel jelölünk.

4.5. Állítás. Ha egy Morita-összefüggés egyik alkotó 2-cellája balinvertálható, akkor izomorfizmus.

Az ilyen Morita-összefüggések (a szóban forgó alkotó 2-cella invertálásával) egy az egyben megfelelnek az invertálható egységű adjunkcióknak. Azokat a Morita-összefüggéseket, amelyeknek mindkét alkotó 2-cellája invertálható, *szigorúaknak* hívjuk, és ezek az adjungált ekvivalenciáknak felelnek meg.

4.7. Tétel. A következő feltételek ekvivalensek egy $\mathbb{f}$ Morita-összefüggésre:
a) $\mathbb{f}$ szigorú.
b) Valamely $\mathbb{h}$ szigorú Morita-összefüggésből megy egy $\mathbf{Mrt}\mathbb{B}$-beli 2-cella $\mathbb{f}$-be. [Egy ilyen 2-cella ekkor mindenképpen *izomorfizmus*.]
c) $\mathbb{f}$ egy ekvivalencianyíl $\mathbf{Mrt}\mathbb{B}$-ben.

4.8. Következmény. Két objektum pontosan akkor ekvivalens $\mathbf{Mrt}\mathbb{B}$-ben, ha már $\mathbb{B}$-ben ekvivalensek voltak.

4.9. Következmény. Az $\mathbf{Mrt}\mathbb{B}$ bikategóriában minden adjunkciónak invertálható az egysége (következésképp Morita-összefüggésnek is tekinthető).

5. Kettős kategóriák

Ha egy bikategóriát úgy bővítünk „függőleges struktúrával”, hogy abban már nem feltétlenül csak párhuzamos nyilak között mehetnek 2-cellák (a későbbiekben csak: *cellák*), akkor a *pszeudo kettős kategória* fogalmához jutunk.

Minthogy nálunk alapértelmezésben csak gyengén asszociatív a *vízszintes* kompozíció, általában elhagyjuk a 'pszeudo' előtagot. (Megj. [?]-ban a függőleges kompozíció a gyengén asszociatív.)

Először bevezetjük az $\mathbb{A}$ bikategóriából $\mathbb{B}$-be menő *kettős ág* fogalmát (5.1. def.), amiben a pontok között olyan átmenő, úgynevezett „függőleges" nyilak mehetnek, amiket nem kell tudni összekomponálni $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ nyilaival, és a nyilak között átmenő cellák mehetnek, két kitüntetett függőleges nyíl „mentén". Az átmenő cellákat komponálni lehet „felülről" $\mathbb{A}$, „alulról" $\mathbb{B}$ 2-celláival, valamint vízszintesen egymással:

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[r, bend left=60, "\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\varphi"] & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r] \arrow[r, bend right=60, "\beta"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "a_1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\varphi"] & \cdot \arrow[r, "a_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\psi"] & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r, "b_1"'] & \cdot \arrow[r, "b_2"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

$$a_i, \alpha \in \mathbb{A}, \quad b_i, \beta \in \mathbb{B}$$

Ezek után, egy (pszeudo) kettős kategóriát úgy értelmezünk, mint egy belső monoid a bikategóriák és kettős ágak $\mathbb{BicProf}$ bikategóriájában. A monoidműveletre mint függőleges kompozícióra tekintünk.

Például, a $\mathbb{Span}$ bikategória „fölé" építhető az a ($\mathbb{SET}$-tel jelölt) kettős kategória, amiben a függőleges nyilak a ponthalmazok közti függvények, és a cellák az ezek menti gráfmorfizmusok.

Az 5.3.7. példában bevezetjük egy $\mathbb{B}$ (szigorúan asszociatív) bikategória Ehresmann-féle *kvintettjeinek* a $\mathbb{Q}(\mathbb{B})$ kettős kategóriáját, [Ehresmann], aminek a függőleges és vízszintes nyilai is a $\mathbb{B}$-beli nyilak, és cellái az $av \Longrightarrow ub$ alakú 2-cellák:

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & \cdot \arrow[d, "v"] \\
\cdot \arrow[r, "b"'] & \cdot
\end{tikzcd} .
$$

A $\mathbb{BicProf}$-beli belső monoidok közti bimodulusokat a kettős kategóriák közti *kettős ágaknak* hívjuk, az ezek által alkotott bikategóriát $\mathbb{DbProf}$ jelöli.

Egy $\mathbb{A} \not\downarrow \mathbb{B}$ kettős ág tekinthető $\mathbb{A}$-t és $\mathbb{B}$-t magában foglaló kettős kategóriának, ugyanúgy, ahogy egy ág tekinthető kategóriának.

A 2. fejezetben írtak két dimenziós analógiájaként, reflexiókkal illetve koreflexiókkal egy egyszerű jellemzését adjuk a bi- és kettős kategóriák elméletében alapvető szerepet játszó kolax és lax funktoroknak:

5.9. Definíció. Egy $\langle \mathbb{F}, (\mathrm{k}_A)_A, (\kappa_a)_a \rangle$ hármast ***reflektív kettős ágnak*** hívunk, ha $\mathbb{F} : \mathbb{A} \not\downarrow \mathbb{B}$ kettős ág, amiben minden $A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$ objektumhoz adott egy

A-ból induló $\mathtt{k}_A$ függőleges reflexiónyíl, és minden $\underset{A \to A_1}{a} \in \mathbb{A}$ vízszintes nyílhoz egy $\kappa_a \colon$
\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathtt{k}_A"'] & \cdot \arrow[d, "\mathtt{k}_{A_1}"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}
reflexiócella.

A következőkben igazoljuk, hogy az $\mathbb{A} \not\downarrow \mathbb{B}$ reflektív kettős ágak és az $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ kolax funktorok egyértelműen meghatározzák egymást, izomorfizmus erejéig (5.11., 5.14., 5.17. tételek). A K kolax funktorhoz tartozó kettős ágat K_* jelöli. Duálisan, az $\mathbb{A} \not\downarrow \mathbb{B}$ koreflektív kettős ágak és $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ lax funktorok is kölcsönösen meghatározzák egymást (5.13. tétel). Az L lax funktorhoz tartozó kettős ágat L^* jelöli.

Az 5.15.*c)* állításban bebizonyítjuk Böhm Gabriella egy, a Rényi Intézetben tartott algebra szemináriumon felvetett sejtését: egy kettős kategória vízszintes bikategóriájában lévő Morita-összefüggések jellemezhetőek egy egyszerű speciális 2-kategóriából kiinduló lax funktorokkal, aminek két, egymással izomorf pontja van, egyetlen izomorfizmus párral közöttük, és triviális (identikus) 2-cellái. Ld. még [Pecsi]. Ez folytatja a belső monoidok és bimodulusok egy-egy egyszerű 2-kategóriából menő lax funktorokkal való prezentálásának a sorát, ld. 5.15. állítás, vö. pl. [Koslowski].

5.16. Állítás. Legyenek $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ kettős kategóriák. Ekkor az $\mathbb{A}^{\mathrm{co}} \times \mathbb{B} \to \mathbb{SET}$ lax funktorok egy az egyben megfeleltethetőek az $\mathbb{A} \not\downarrow \mathbb{B}$ kettős ágaknak.

6. Kolax/lax adjunkciók

A [Gran-Pare2]-ben és 6.4.-ben bevezetett $\mathbb{Dbl}$ kettős kategóriát, melynek objektumai a pszeudo kettős kategóriák, vízszintes nyilai a lax, függőleges nyilai a kolax funktorok, lokálisan teljesen beágyazzuk a $\mathbb{DbProf}$ bikategóriából képzett Ehresmann-féle kvintettek $\mathbb{Q}(\mathbb{DbProf})$ kettős kategóriájába, mely mindkét irányban gyengén asszociatív. (6.5. tétel.)

Ez a beágyazás vízszintesen kontravariáns, így a $\mathbb{Dbl}$-beli *ortogonális adjunkciók*, azaz a kolax/lax adjunkciók, megfeleltethetőek a $\mathbb{Q}(\mathbb{DbProf})$-beli *kísérő pároknak* (angolul „companion pairs”), ami egy csapásra igazolja a következő tételt, amely – az 5.16. állításbeli megfeleltetést használva, – a [Pare] és a [Fio-Gam-Kock] írásokban is megjelent.

6.6. Tétel. Egy K kolax és egy L lax funktor pontosan akkor adjungáltak a $\mathbb{Dbl}$ kettős kategóriában, ha $K_* \cong L^*$ a $\mathbb{DbProf}$ bikategóriában.

A fenti $\mathbb{Dbl}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{DbProf})$ beágyazás egy dimenziós megfelelője az a $\mathbb{Q}(\mathbb{Cat})^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{Prof})$ (szintén lokálisan teljes) beágyazás, amit a 2.10.-ben tárgyalt $\mathbb{Cat}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbb{Prof}$ és $\mathbb{Cat}^{\mathrm{co}} \hookrightarrow \mathbb{Prof}$ beágyazások „összetevéséből” nyerhetünk. Erre alkalmazva az iménti tétel megfelelőjét, világossá válik az adjungált funktorpár kétféle definíciójának ekvivalenciája: ha ugyanis $F:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ és $G:\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktorok, úgy

$$F \dashv G \ \ \mathbb{C}\mathrm{at}\text{-ban} \iff F \dashv G \ \ \mathbb{Q}(\mathbb{C}\mathrm{at})\text{-ban} \iff$$
$$F_*\text{-nak vízszintes kísérője a } G^* \ \ \mathbb{Q}(\mathbb{P}\mathrm{rof})\text{-ban} \iff F_* \cong G^* \ \ \mathbb{P}\mathrm{rof}\text{-ban.}$$

Függelék

Az **A.** részben összevetjük a Bénabou-féle és az értekezésben interpretált Leinster-féle bikategóriákat (A.1. és 1.1. def.), lásd még [Leinster].

A **B.** részben a saját eszközeinkkel (kettős ágakkal) interpretáljuk a 6. fejezetben előforduló Verity-féle, mindkét irányban gyengén asszociatív kettős kategóriákat és a köztük menő pszeudofunktorokat, a B.1. és B.3. definíciókban. Vö. [Morton], [Verity].

————o————

Hivatkozások

[Benabou] J. Bénabou. Introduction to Bicategories Reports of the Midwest Category Seminar, *Lecture Notes in Mathematics* vol.**47**, (1967), pp. 1–77.

[Betti] R. Betti. Formal Theory of Internal Categories. *Le Matematiche*, vol.**51**, (1996), pp. 35–52.

[Ehresmann] C. Ehresmann. Catégories Structurées III: Quintettes et Applications Covariantes. *Cahiers Top. Géom. Diff. Cat.*, vol.**5**, (1963), pp. 1–22.

[El Kaoutit] L. El Kaoutit. Wide Morita Contexts in Bicategories. *Arab. J. Sci. Eng.* vol.**33**, (2008), pp. 153–173. http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0608/0608601v1.pdf

[Fio-Gam-Kock] Thomas M. Fiore, N. Gambino and J. Kock. Double Adjunctions and Free Monads. preprint, (2011). http://arxiv.org/abs/1105.6206v2

[Gran-Pare2] M. Grandis and R. Paré. Adjoint for Double Categories. *Cahiers Top. Géom. Diff. Cat.*, vol.**45**, (2004), pp. 193–240.

[Koslowski] J. Koslowski. Monads and Interpolads in Bicategories. *Theory and Applications of Categories*, vol.**3** No. 8, (1997), pp. 182-212.

[Leinster] T. Leinster. Higher operads, higher categories. *Cambridge University Press*, Cambridge 2004.

[Morton] Jeffrey Morton. Double Bicategories and Double Cospans. *Journal of Homotopy and Related Structures*, vol.**4**, (2009), pp. 389-428.
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0611/0611930v3.pdf

[Pare] Robert Paré. Yoneda Theory for Double Categories. *Theory and Applications of Categories*, vol.**25**, No. 17, (2011), pp. 439–489.

[Pecsi] Bertalan Pécsi. On Morita Context in Bicategories. *Applied Categorical Structures*, vol.**20**, (2012), pp. 415–432.

[PecsiDipl] Bertalan Pécsi. Categorical Trees as Formulas. *Master's Thesis*: ELTE Univ., Budapest– Vrije Univ., Amsterdam (2003).
http://renyi.hu/~aladar/diploma.pdf

[Verity] Dominic Verity. Enriched Categories, Internal Categories and Change of Base. (1992). *Reprints in Theory and Applications of Categories*, No.**20**, (2011), pp. 1–266.